Livret de liaison 1ere-Terminale pour la spécialité mathématique.

Les mathématiques sont une construction dont chaque étape est importante : afin de pouvoir comprendre et assimiler les nouvelles connaissances de terminale, il est indispensable de maîtriser le programme de 1ère.
Vous trouverez donc dans ce livret des exercices qui vous aideront à préparer votre entrée en terminale.
Un corrigé est proposé à partir de la page 5 de ce document.
Nous avons choisi de mettre l'accent sur **le second degré, les suites numériques. la dérivation et la fonction exponentielle.**

« En travaillant assidûment il faut peu de chose pour changer le médiocre en bon et le bon en excellent ».
Gustave FLAUBERT

Un contrôle de connaissance de 1 heure constitué d'exercices semblables à ceux proposés dans ce livret aura lieu la deuxième semaine de la rentrée.

VIDEO **Besoin d'aide ?** En plus de vos cours de 1ère, nous vous proposons aussi quelques **vidéos pouvant vous apporter de l'aide** pour faire les exercices de ce livret.

SECOND DEGRE.

VIDEO **Savoir :**

- résoudre une équation du second degré » : https://www.youtube.com/watch?v=youUIZ-wsYk https://www.youtube.com/watch?v=v6fI2RqCCiE
- étudier le signe d'un trinôme : https://www.youtube.com/watch?v=sFNW9KVsTMY https://www.youtube.com/watch?v=pT4xtI2Yg2Q
- étudier la position relative de 2 courbes : https://www.youtube.com/watch?v=EyxP5HIfyF4

Exercice 1 Savoir résoudre une équation du second degré (ou s'y ramenant).

1. Niveau 1 : Résoudre les équations suivantes

a) $\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{6}x - \frac{1}{12} = 0$ **b)** $5x^2 + x + 4 = 0$ **c)** $3x^2 - 4x - 1 = 2x - 4$

2. Niveau 2.

a) Résoudre l'équation $\frac{-x^2 + 2x + 8}{2x + 4} = 0$

b) Montrer que, pour tout réel x, on a l'égalité : $3x^4 + x^3 - 16x^2 - 5x + 5 = (x^2 - 5)(3x^2 + x - 1)$.

Résoudre alors l'équation $3x^4 + x^3 - 16x^2 - 5x + 5 = 0$.

Exercice 2 Résoudre un problème de degré 2.

Déterminer trois nombres entiers consécutifs, sachant que la somme des carrés de ces nombres est égale à 1 877.

Exercice 3 Savoir étudier le signe d'un polynôme de degré 2 (trinôme).

Dans chacun des cas suivants, étudier le signe de $f(x)$.

1. $f(x) = x^2 - 7x + 10$ **2.** $f(x) = -6x^2 + x - 1$

Exercice 4 Savoir étudier la position relative de deux courbes.

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 4x + 3$ et $g(x) = x + 4$.

Etudier la position relative des courbes C_f et C_g représentant les fonctions f et g.
(*on commencera par étudier le signe de* $f(x) - g(x)$)

VIDEO

Savoir :
- dériver une fonction :
- étudier le sens de variations d'une fonction :
- déterminer une équation d'une tangente :
- lire graphiquement un nombre dérivé :

https://www.youtube.com/watch?v=9Mann4wOGJA
https://www.youtube.com/watch?v=1fOGueiO_zk
https://www.youtube.com/watch?v=OMsZNNIIdrw
https://www.youtube.com/watch?v=-MfEczGz_6Y
https://www.youtube.com/watch?v=23_Ba3N0fu4
https://www.youtube.com/watch?v=bELc3OM9osQ
https://www.youtube.com/watch?v=0jhxK55jONs

Exercice 5 **Savoir dériver une fonction et étudier ses variations**

Dans chacun des cas ci-dessous, où f est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, calculer la fonction dérivée de f et établir le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

1. $f(x) = 2x^3 - 2x^2 + 5x + 7$ **2.** $f(x) = (x^2 + 1)(6x^2 - 10)$ **3.** $f(x) = \dfrac{4x + 1}{2x^2 + 1}$

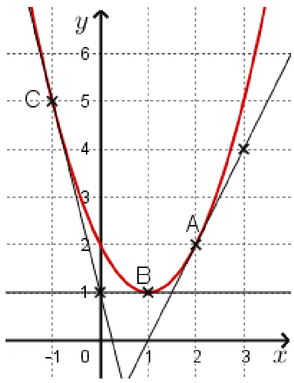
Exercice 6 **Savoir déterminer une équation de la tangente à une courbe**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x + 1$ et C_f sa courbe représentative

a) Déterminer, à la main une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 3.

b) Vérifier votre résultat en traçant, sur votre calculatrice, la tangente T et la courbe C_f.

Exercice 7 **Savoir lire un nombre dérivée et déterminer une équation de la tangente à une courbe (bis)**



On donne, ci-contre, la courbe C_f d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, ainsi que ses tangentes T_A, T_B et T_C aux points A, B et C d'abscisses respectives 2, 1 et -1.

1. Déterminer graphiquement :

a) $f(2)$, $f(1)$ et $f(-1)$. **b)** $f'(2)$, $f'(1)$ et $f'(-1)$.

2. En déduire une équation de chacune des tangentes T_A, T_B et T_C.

Exercice 8

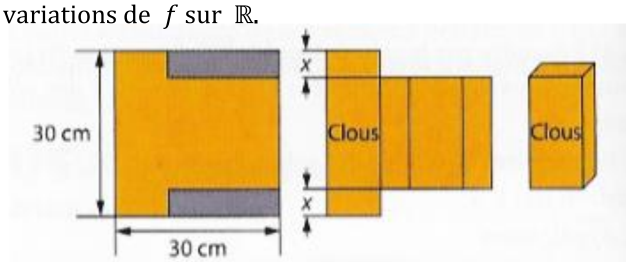
PARTIE A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 60x^2 + 450x$.

1. Calculer $f'(x)$ où f' désigne la dérivée de la fonction f.

2. Etudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ puis en déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

PARTIE B



Un fabricant envisage la production de boîtes pour emballer des clous en découpant deux bandes de même largeur dans une feuille de carton carrée de côté 30 cm.
On note x la mesure, en cm, de la largeur des bandes découpées.

1. Expliquer pourquoi les valeurs prises par x appartiennent à l'intervalle $]0\,;\,15[$.

2. **a)** Soit $V(x)$ le volume, en cm³, de la boîte. Exprimer $V(x)$ en fonction de x.

b) Vérifier que $V(x) = 2x^3 - 60x^2 + 450x$.

3. Déterminer les dimensions de la boîte de volume maximal. Quel est ce volume maximal ?

Savoir :

- calculer les termes d'une suite : https://www.youtube.com/watch?v=HacflVQ7DIE
- calculer les termes d'une suite avec Python : https://www.youtube.com/watch?v=CYDUNYndHfg
- étudier une suite arithmétique : https://www.youtube.com/watch?v=6O0KhPMHvBA https://www.youtube.com/watch?v=6O0KhPMHvBA
- étudier une suite géométrique : https://www.youtube.com/watch?v=WTmdtbQpa0c https://www.youtube.com/watch?v=gUkOjvAiZGA
- calculer la somme des 1ers termes d'une suite avec Python. https://www.youtube.com/watch?v=_3bwycUCtmg

Exercice 9 **Savoir calculer les premiers termes d'une suite.**

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = 3n - 2$ et $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = 3v_n - 2 \end{cases}$.

1. Pour chacune de ces suites, calculer les quatre premiers termes.
2. On donne ci-dessous, le script Python d'une fonction permettant de calculer le terme de rang n de chacune de ces suites. Compléter cet algorithme :

```
>>> def u(n):
        u = ...
        return(u)
```

```
>>> def v(n):
        v = ...
        for i in range(1,n+1):
            v = ...
        print(v)
```

Exercice 10 **Etude d'une suite arithmétique.**

Soit (u_n) la suite arithmétique de 1er terme $u_0 = 8$ et de raison $r = 3$.

1. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n en fonction de n.
2. Calculer u_{50}.
3. Calculer $S = \sum_{k=0}^{50} u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_{50}$.

Exercice 11 **Etude d'une suite géométrique.**

Soit (u_n) la suite géométrique de 1er terme $u_0 = 3$ et de raison $q = 2$.

1. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n en fonction de n.
2. Calculer u_9.
3. Calculer $S = \sum_{k=0}^{9} u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_9$.

Exercice 12

Une entreprise de sécurité lance un nouveau système d'alarme. La première semaine, 2000 unités sont produites puis la production augmentera chaque semaine de 10%.

On désigne par u_n le nombre de systèmes fabriqués la *n-ième* semaine. On arrondira les résultats à l'unité.

1. Donner u_1 puis calculer u_2, u_3 et u_4.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n pour tout entier naturel n. Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?
3. Exprimer u_n en fonction de n.
4. Calculer la production totale des 20 premiers semaines.
5. L'entreprise souhaite savoir au bout de combien de semaine sa production totale aura dépassé 150 000 unités. Elle a donc écrit les deux fonctions Python ci-dessous. La première donne la somme des n premiers termes de la suite (u_n). Compléter ces deux scripts afin que la 2e fonction indique à partir de quelle semaine la production totale sera supérieure ou égale à 150 000.

```
>>> def somme(n):
        u = ...
        s = ...
        for i in range(1, n+1):
            s = ...
            u = ...
        return(s)
```

```
>>> def seuil() :
        n = ...
        while ... :
            n = ...
        return(n)
```

VIDEO
- revoir les propriétés de exp : https://www.youtube.com/watch?v=aD03wqgxexk&feature=youtu.be
- étudier une fonction avec exp : https://www.youtube.com/watch?v=_MA1aW8ldjo&feature=youtu.be

Exercice 13 **Savoir utiliser les propriétés algébriques de la fonction exponentielle.**

Ici, x désigne un réel quelconque. Simplifier au maximum les expressions suivantes.

a) $e^5 \times e^{-2} \times e^3$ **b)** $(e^5 \times e^2)^4$ **c)** $\frac{e^{-2} \times (e^3)^2}{e^2}$ **d)** $\frac{(e^x)^2 \times e^{x+1}}{e^{x-1}}$

Exercice 14 **Savoir résoudre une équation où apparaît la fonction exponentielle.**

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) $e^{x+2} < 1$ **b)** $e^{5x+1} \geq e \times e^{2x}$ **c)** $e^{(x^2)} = e$ **d)** $(e^x - e^2)(e^{-x} + 5) = 0$

Exercice 15 **Savoir étudier une fonction où apparaît la fonction exponentielle.**

On considère les trois fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = (5 - x)e^x$ $g(x) = (e^x + 1)(e^x - 3)$ $h(x) = \frac{x - 2}{e^x}$

Pour chacune de ces fonctions, on demande :

a) d'exprimer la dérivée en fonction de x.

b) d'étudier le signe de la dérivée sur $\mathbb{R}$.

c) de construire le tableau de variations de la fonction.

d) de vérifier le tableau de variations en traçant la courbe de la fonction sur la calculatrice.

Exercice 16 **Savoir utiliser la formule permettant de calculer la dérivée de e^{ax+b}.**

Le taux d'alcoolémie (en grammes par litre de sang) d'un homme de 70 kg après absorption de deux verres d'alcool à l'instant $x = 0$ est donné, en fonction du temps x (en heures), par la fonction f définie sur $I = [0\,;\,4]$ par :

$$f(x) = 3xe^{-1,25x}.$$

a) Montrer que pour tout x dans I, on a : $f'(x) = (3 - 3,75x)e^{-1,25x}$.

b) Etablir le tableau de variation de f sur I.

c) En déduire le nombre de minutes au bout duquel le taux d'alcool est maximal.

Corrigé du livret de liaison 1ère $\longrightarrow$ Tle - Mathématiques

Exercice 1 **Savoir résoudre une équation du second degré ou s'y ramenant**

1. Niveau 1

a) $\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{6}x - \frac{1}{12} = 0 \Leftrightarrow 8x^2 - 2x - 1 = 0$ est une équation de degré 2 (car forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = 8, b = -2, c = -1$) de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 8 \times (-1) = 36$

$\Delta > 0$, donc **l'équation admet deux solutions réelles distinctes :**

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2-\sqrt{36}}{2 \times 8} = -\mathbf{\frac{1}{4}} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2+\sqrt{36}}{2 \times 8} = \mathbf{\frac{1}{2}} \qquad \boxed{\mathbf{S} = \left\{-\mathbf{\frac{1}{4}}\,;\ \mathbf{\frac{1}{2}}\right\}}$$

b) $5x^2 + x + 4 = 0$ est une équation de degré 2 de $\Delta = 1^2 - 4 \times 5 \times 4 = -79$

$\Delta < 0$, donc **l'équation n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$.** $\boxed{\mathbf{S} = \emptyset}$

c) $3x^2 - 4x - 1 = 2x - 4 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 3 = 0$ est une équation de degré 2 de $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 3 \times 3 = 0$

$\Delta = 0$, donc **l'équation admet une solution (double) réelle :** $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2\times 3} = \mathbf{1}$ $\boxed{\mathbf{S} = \{\mathbf{1}\}}$

Remarque On pouvait aussi remarquer que le calcul de Δ n'était pas nécessaire ici :

$$3x^2 - 6x + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

2. Niveau 2

a) $\frac{-x^2 + 2x + 8}{2x + 4} = 0$ ***équation « quotient nul » :*** $\frac{A}{B} = 0 \Leftrightarrow A = 0$ <u>et</u> $B \neq 0$

$\Leftrightarrow$ $-x^2 + 2x + 8 = 0$ <u>et</u> $2x + 4 \neq 0$

$\Leftrightarrow$ $x = 4$ <u>ou</u> $x = -2$ <u>et</u> $x \neq -2$

$-x^2 + 2x + 8 = 0$ est une équation de degré 2
de $\Delta = 2^2 - 4 \times (-1) \times 8 = 36$
$\Delta > 0$, donc l'équation admet 2 solutions réelles distinctes :
$x_1 = \frac{-2-\sqrt{36}}{2 \times (-1)} = 4$ et $x_2 = \frac{-2+\sqrt{36}}{2 \times (-1)} = -2$

Finalement, **l'équation $\frac{-x^2 + 2x + 8}{2x + 4} = 0$ admet une seule solution dans $\mathbb{R}$: 4.**

b) Pour tout réel x, $(x^2 - 5)(3x^2 + x - 1) = 3x^4 + x^3 - x^2 - 15x^2 - 5x + 5 = 3x^4 + x^3 - 16x^2 - 5x + 5$.

Par suite, $3x^4 + x^3 - 16x^2 - 5x + 5 = 0$

$\Leftrightarrow$ $(x^2 - 5)(3x^2 + x - 1) = 0$ ***équation « produit nul » :*** $A \times B = 0 \Leftrightarrow A = 0$ <u>ou</u> $B = 0$

$\Leftrightarrow$ $x^2 - 5 = 0$ <u>ou</u> $3x^2 + x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow$ $x = -\sqrt{5}$ <u>ou</u> $x = \sqrt{5}$ <u>ou</u> $x = x_1$ <u>ou</u> $x = x_2$

$3x^2 + x - 1 = 0$ est une équation de degré 2
de $\Delta = 1^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 13$
$\Delta > 0$, donc l'équation admet 2 solutions réelles distinctes :
$x_1 = \frac{-1-\sqrt{13}}{2 \times 3} = \frac{-1-\sqrt{13}}{6}$ et $x_2 = \frac{-1+\sqrt{13}}{2 \times 3} = \frac{-1+\sqrt{13}}{6}$

Finalement, **l'équation $3x^4 + x^3 - 16x^2 - 5x + 5 = 0$ a pour ensemble solution :**

$$\mathbf{S} = \left\{-\sqrt{5}\,;\ \sqrt{5}\,;\ \frac{-1-\sqrt{13}}{6}\,;\ \frac{-1+\sqrt{13}}{6}\right\}$$

Exercice 2 **Résoudre un problème de degré 2**

Soit n un entier quelconque. $n-1$, n et $n+1$ sont alors trois entiers consécutifs.
Savoir que la somme des carrés de ces nombres est égale à 1 877 équivaut à :

$(n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 = 1\,877$ soit $n^2 - 2n + 1 + n^2 + n^2 + 2n + 1 = 1\,877$

$\Leftrightarrow \quad 3n^2 = 1\,875$

$\Leftrightarrow \quad n^2 = 625$

$\Leftrightarrow \quad n = -25$ ou $n = 25$

Les trois entiers consécutifs dont la somme des carrés est égale à 1 877 sont : -26 , -25 , -24 ou 24 , 25 , 26.

Remarque En considérant les entiers consécutifs $n, n+1$ et $n+2$, on obtient l'équation :

$$n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = 1\,877 \quad \Leftrightarrow n^2 + n^2 + 2n + 1 + n^2 + 4n + 4 = 1\,877$$

$$\Leftrightarrow 3n^2 + 6n - 1\,872 = 0$$

Cette dernière équation est de degré 2, son discriminant $\Delta = 6^2 - 4 \times 3 \times (-1\,872) = 22\,500$
$\Delta > 0$, donc **l'équation admet deux solutions réelles distinctes :**

$$n_1 = \frac{-6-\sqrt{22\,500}}{2 \times 3} = \mathbf{-26} \qquad \text{et} \qquad n_2 = \frac{-6+\sqrt{22\,500}}{2 \times 3} = \mathbf{24}$$

On retrouve les deux triplets -26 , -25 , -24 ou 24 , 25 , 26.

Exercice 3 **Savoir déterminer le signe d'un polynôme de degré 2**

1. $f(x) = x^2 - 7x + 10$ est un polynôme de degré 2 de $\Delta = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 10 = 9$

$\Delta > 0$, donc $f(x)$ admet deux racines réelles distinctes : $x_1 = \dfrac{7-\sqrt{9}}{2 \times 1} = 2$ et $x_2 = \dfrac{7+\sqrt{9}}{2 \times 1} = 5$.

$f(x)$ est donc du signe de 1 (coefficient de x^2) sauf entre ses racines 2 et 5.

x	$-\infty$		2		5		$+\infty$
signe de $f(x)$		+	0	$-$	0	+	

2. $f(x) = -6x^2 + x - 1$ est un polynôme de degré 2 de $\Delta = 1^2 - 4 \times (-6) \times (-1) = -23$

$\Delta < 0$, donc $f(x)$ n'admet pas de racine réelle.

$f(x)$ est donc du signe de -6 (coefficient de x^2), autrement dit, **$f(x)$ est strictement négatif sur** $\mathbb{R}$

Exercice 4 **Savoir étudier la position relative de deux courbes**

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 4x + 3$ et $g(x) = x + 4$.

$f(x) - g(x) = -2x^2 + 4x + 3 - (x+4) = -2x^2 + 3x - 1$

$-2x^2 + 3x - 1$ est un polynôme de degré 2 de $\Delta = 3^2 - 4 \times (-2) \times (-1) = 1$

$\Delta > 0$, donc $f(x) - g(x)$ admet deux racines réelles distinctes : $x_1 = \dfrac{-3-\sqrt{1}}{2 \times (-2)} = 1$ et $x_2 = \dfrac{-3+\sqrt{1}}{2 \times (-2)} = 0{,}5$.

$f(x) - g(x)$ est donc du signe de -2 (coefficient de x^2) sauf entre ses racines 0,5 et 1.

x	$-\infty$		0,5		1		$+\infty$
signe de $f(x) - g(x)$		$-$	0	+	0	$-$	

CONCLUSION

- **Sur** $]-\infty\,;\ $ **0,5**$[\ \cup\ ]$**1** ; $+\infty[$, $f(x) - g(x) < 0$ soit $f(x) < g(x)$ et donc $\boldsymbol{C_f}$ **est strictement en dessous de** $\boldsymbol{C_g}$;
- **sur]0,5 ; 1[**, $f(x) - g(x) > 0$ soit $f(x) > g(x)$ et donc $\boldsymbol{C_f}$ **est strictement au-dessus de** $\boldsymbol{C_g}$;
- **sur {0,5 ; 1}**, $f(x) - g(x) = 0$ soit $f(x) = g(x)$ et donc $\boldsymbol{C_f}$ **et** $\boldsymbol{C_g}$ **se coupent aux points d'abscisses 0,5 et 1.**

Exercice 5 **Savoir dériver une fonction et étudier ses variations**

METHODE : Pour étudier les variations d'une fonction, il suffit d'étudier le signe de sa dérivée.

1. **f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 2x^2 + 5x + 7$**

- Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{f'(x) = 6x^2 - 4x + 5}$
- $f'(x)$ est un polynôme de degré 2 de $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 6 \times 5 = -104$

  $\Delta < 0$, donc $f'(x)$ n'admet pas de racine réelle et est du signe de 6 (coefficient de x^2) sur $\mathbb{R}$.

  Finalement, **$f'(x)$ est strictement positif sur** $\mathbb{R}$ et donc **f est strictement croissante sur** $\mathbb{R}$.

2. **f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 + 1)(6x^2 - 10)$**

- $f(x) = u(x)v(x)$ donc $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ avec $\begin{cases} u(x) = x^2 + 1 & \text{et} \quad u'(x) = 2x \\ v(x) = 6x^2 - 10 & \text{et} \quad v'(x) = 12x \end{cases}$

  Ainsi, pour tout réel x, $f'(x) = 2x(6x^2 - 10) + (x^2 + 1)12x = 24x^3 - 8x = \boldsymbol{8x(3x^2 - 1)}$

  $= \boldsymbol{8x(\sqrt{3}x - 1)(\sqrt{3}x + 1)}$

- **Tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$**

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
signe de $8x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $3x^2 - 1$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
variation de f		$\searrow$	$-\frac{32}{3}$	$\nearrow$	-10	$\searrow$	$-\frac{32}{3}$	$\nearrow$	

$3x^2 - 1$ est un polynôme de degré 2 qui s'annule en $-\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ et $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
$3x^2 - 1$ est donc du signe de 3 (coefficient de x^2) sauf entre ses racines.

$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{1}{3} + 1\right)\left(6 \times \frac{1}{3} - 10\right) = \frac{4}{3} \times (-8) = -\frac{32}{3}$ et $f(0) = 1 \times (-10) = -10$

3. **f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{4x + 1}{2x^2 + 1}$**

- $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ donc $f'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$ avec $\begin{cases} u(x) = 4x + 1 & \text{et} \quad u'(x) = 4 \\ v(x) = 2x^2 + 1 & \text{et} \quad v'(x) = 4x \end{cases}$

  Par suite, pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{4(2x^2 + 1) - (4x + 1)4x}{(2x^2 + 1)^2} = \boldsymbol{\dfrac{-8x^2 - 4x + 4}{(2x^2 + 1)^2}}$

- **Pour tout réel x, $(2x^2 + 1)^2 > 0$ et donc $f'(x)$ est du signe de $-8x^2 - 4x + 4$.**

  Or, $-8x^2 - 4x + 4$ est un polynôme de degré 2 de $\Delta = (-4)^2 - 4 \times (-8) \times 4 = 144$

  $\Delta > 0$, donc $-8x^2 - 4x + 4$ admet deux racines réelles distinctes : $x_1 = \dfrac{4 - \sqrt{144}}{2 \times (-8)} = \dfrac{1}{2}$ et $x_2 = \dfrac{4 + \sqrt{144}}{2 \times (-8)} = -1$

  $-8x^2 - 4x + 4$ est donc du signe de -8 (coefficient de x^2) sauf entre ses racines -1 et $\frac{1}{2}$.

  Tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
variation de f		$\searrow$	-1	$\nearrow$	2	$\searrow$	

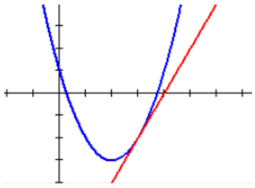
Exercice 6 **Savoir déterminer une équation de la tangente à une courbe**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x + 1$ et C_f sa courbe représentative.

a) Une équation de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 3 est : $\boxed{y = f'(3)(x-3) + f(3)}$

Or, $f(3) = -2$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x - 4$ donc $f'(3) = 2$.

Par suite, une équation de la tangente est : $y = 2(x-3) - 2$ soit $\boldsymbol{y = 2x - 8}$



b) **A la calculatrice,** comme l'atteste le document ci-contre, il semble bien que la droite T soit tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 3.

Exercice 7 **Savoir lire graphiquement un nombre dérivé.**

1. a) $f(2) = 2$, $f(1) = 1$ et $f(-1) = 5$

b) **Lorsque f est dérivable en x, $f'(x)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe C_f de f au point d'abscisse x :** $f'(2) = 2$, $f'(1) = 0$ et $f'(-1) = -4$.

2. $T_A : y = f'(2)(x-2) + f(2)$ soit $\boldsymbol{T_A : y = 2x - 2}$

$T_B : y = f'(1)(x-1) + f(1)$ soit $\boldsymbol{T_B : y = 1}$

$T_C : y = f'(-1)(x-(-1)) + f(-1)$ soit $\boldsymbol{T_C : y = -4x + 1}$

Exercice 8

PARTIE A Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 60x^2 + 450x$.

1. $\boldsymbol{f'(x)} = 2 \times 3x^2 - 60 \times 2x + 450 = \boldsymbol{6x^2 - 120x + 450}$

2. $f'(x)$ est un polynôme de degré 2 de $\Delta = (-120)^2 - 4 \times 6 \times 450 = 3\,600 = 60^2$

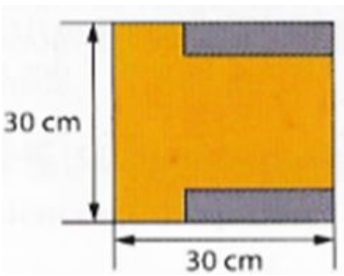
$\Delta > 0$, donc $f'(x)$ admet deux racines réelles distinctes : $x_1 = \dfrac{120 - 60}{2 \times 6} = 5$ et $x_2 = \dfrac{120 + 60}{2 \times 6} = 15$

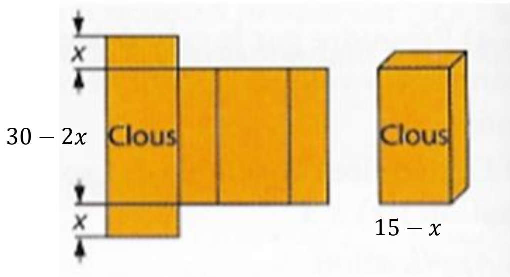
$f'(x)$ est donc du signe de 6 (coef de x^2) sauf entre ses racines 5 et 15.

- **Tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$**

x	$-\infty$		5		15		$+\infty$
signe de $f'(x)$		+	0	−	0	+	
variation de f		↗	1 000	↘	0	↗	

PARTIE B





1. x désigne la mesure, en cm, de la largeur des bandes découpées, donc $\boldsymbol{x > 0}$.
De plus, $30 - 2x$ désigne la mesure, en cm, de la hauteur de la boîte, donc $30 - 2x > 0$ soit $\boldsymbol{15 > x}$.
Les valeurs prises par x appartiennent donc bien à l'intervalle]0 ; 15[.

2. a) Pour tout réel x tel que $0 < x < 15$, les dimensions de la boîte sont, en cm, $30 - 2x$, $15 - x$ et x.
La mesure en cm³ du volume de la boîte est : $\mathrm{V}(x) = (30 - 2x)(15 - x)x$

b) $\mathrm{V}(x) = (30 - 2x)(15 - x)x = (450 - 30x - 30x + 2x^2)x = 2x^3 - 60x^2 + 450x$ *cqfd*

3. La fonction V étant la restriction de la fonction f à l'intervalle]0 ; 15[, d'après la **partie A**, le volume **$\mathrm{V}(x)$ est maximal pour $x = 5$.**
Les dimensions de la boîte de volume maximal sont donc 20 cm, 10 cm et 5 cm et le volume maximal est **égal à $\mathrm{V}(5) = 1\,000$** (cm³).

Exercice 9

1. **La suite (u_n) est définie par son terme général.** Pour calculer le terme d'indice n de la suite, il suffit donc de remplacer n par sa valeur dans l'expression donnée :
   $u_0 = 3 \times 0 - 2 = \mathbf{-2}$ $\quad$ $u_1 = 3 \times 1 - 2 = \mathbf{1}$
   $u_2 = 3 \times 2 - 2 = \mathbf{4}$ $\quad$ $u_3 = 3 \times 3 - 2 = \mathbf{7}$
   La suite (v_n) est définie par récurrence. Chaque terme d'indice $n \geq 1$ de la suite est exprimé en fonction du terme précédent :
   $v_0 = \mathbf{2}$ $\quad$ $v_1 = 3 \times v_0 - 2 = 3 \times 2 - 2 = \mathbf{4}$
   $v_2 = 3 \times v_1 - 2 = 3 \times 4 - 2 = \mathbf{10}$ $\quad$ $v_3 = 3 \times v_2 - 2 = 3 \times 10 - 2 = \mathbf{28}$.
2. Pour calculer un terme de la suite (u_n), il suffit d'utiliser une fois l'expression de la suite donnant le terme général de celle-ci. Pour calculer le terme d'indice n de la suite (v_n), il faut utiliser n fois la formule de récurrence définissant la suite.

```
>>> def u(n) :
        u = 3*n-2
        return(u)
```

```
>>> def v(n) :
        v = 2
        for i in range(1, n+1):
            v = 3*v-2
        print(v)
```

Exercice 10

1. Pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 + nr = \mathbf{8 + 3n}$.

2. Par suite, $u_{50} = 8 + 3 \times 50 = \mathbf{158}$

3. $S = \sum_{k=0}^{50} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{50}$

$= u_0 + (u_0 + 3) + (u_0 + 3 \times 2) + \ldots + (u_0 + 3 \times 50)$

$= 51u_0 + 3(1 + 2 + \ldots + 50)$

$= 51 \times 8 + 3\dfrac{50 \times 51}{2}$ $\qquad$ $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}}$

$= \mathbf{4\ 233}$

Remarque La somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique peut aussi être déterminée par la formule :

$$\boxed{\textit{Nombre de termes de la somme} \times \frac{\textit{1er terme de la somme} + \textit{dernier terme de la somme}}{2}}$$

Soit ici, $S = 51 \times \dfrac{8 + 158}{2} = \mathbf{4\ 233}$

Exercice 11

1. Pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 \times q^n = \mathbf{3 \times 2^n}$.

2. Par suite, $u_9 = 3 \times 2^9 = \mathbf{1\ 536}$

3. $S = \sum_{k=0}^{9} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_9$

$= u_0 + (u_0 \times 2) + (u_0 \times 2^2) + \ldots + (u_0 \times 2^9)$

$= u_0(1 + 2 + 2^2 \ldots + 2^9)$

$= 3\dfrac{1 - 2^{9+1}}{1 - 2}$ $\qquad$ $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^* \text{ et tout réel } q \neq 1,\ 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}}$

$= 3 \times (2^{10} - 1)$

$= \mathbf{3\ 069}$

Remarque La somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$ peut aussi être déterminée par la formule : $\boxed{\textit{1}^{er} \textit{ terme de la somme} \times \dfrac{1 - \textit{raison}^{\textit{nombre de termes de la somme}}}{1 - \textit{raison}}}$

Soit ici, $S = 3 \times \dfrac{1 - 2^{10}}{1 - 2} = \mathbf{3\ 069}$

Exercice 12

1. La première semaine, 2000 unités sont produites donc $\boldsymbol{u_1} = \mathbf{2000}$.
   On sait qu'**augmenter une quantité de 10% revient à la multiplier par** $\left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{10}}{\mathbf{100}}\right) = \mathbf{1,1}$ donc la 2e semaine, le nombre d'unités produites est $\boldsymbol{u_2} = \mathbf{1,1} \times \boldsymbol{u_1} = \mathbf{1,1} \times \mathbf{2000} = \mathbf{2200}$.
   De même, $\boldsymbol{u_3} = \boldsymbol{u_2} \times \mathbf{1,1} = \mathbf{2200} \times \mathbf{1,1} = \mathbf{2420}$ et $\boldsymbol{u_4} = \boldsymbol{u_3} \times \mathbf{1,1} = \mathbf{2420} \times \mathbf{1,1} = \mathbf{2662}$.
2. En généralisant ce qui précède, pour tout entier naturel n, $\boldsymbol{u_{n+1}} = \mathbf{1,1} \times \boldsymbol{u_n}$.
   Ainsi, la suite (u_n) est une **suite géométrique de premier terme $\boldsymbol{u_1} = \mathbf{2000}$ et de raison $\boldsymbol{q} = \mathbf{2000}$.**
3. D'après le cours, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $\boldsymbol{u_n} = \boldsymbol{u_1} \times \boldsymbol{q^{n-1}} = \mathbf{2000} \times \mathbf{1,1^{n-1}}$.
4. La production totale au cours des 20 premières semaines est $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{u_1} + \boldsymbol{u_2} + \cdots + \boldsymbol{u_{20}}$. Cette somme est la somme des 20 premiers termes de la suite géométrique (u_n) donc :
   $$S = premier\ terme \times \frac{1 - raison^{nombre\ termes}}{1 - raison} = u_1 \times \frac{1-q^{20}}{1-q} = 2000 \times \frac{1-1{,}1^{20}}{1-1{,}1} = 20000(1{,}1^{20} - 1)$$
   $$\approx 114550.$$
   Au bout de 20 semaines, **l'entreprise aura donc produit environ 114550 alarmes.**
5. **Pour compléter le script de la fonction *somme***, on commence par définir la suite u comme nous l'avions fait dans l'exercice 9. On initialise la valeur de u à 2000 : $u = 2000$, puis on définit la suite par récurrence : $u = u \times 1{,}1$.
   On procède de la même façon pour définir la somme s. On initialise sa valeur : $s = 0$, puis on indique la relation qui permet de calculer la nouvelle somme :
   $nouvelle\ somme = ancienne\ somme + valeur\ de\ la\ suite$ soit $s = s + u$.
   Pour compléter le script de la fonction *seuil*, il suffit de penser qu'il faut calculer les valeurs de $somme(n)$ à partir de $n = 0$, tant que $somme(n) < 150000$ (c'est-à-dire tant que la condition $somme(n) \geq 150000$ n'est pas réalisée).

```
>>> def somme(n):
        u = 2000
        s = 0
        for i in range(1, n+1):
                s = s+u
                u=u*1.1
        return(s)
```

```
>>> def seuil():
        n = 0
        while somme(n)<150000 :
                n = n+1
        return(n)
```

Remarque Comme l'indique la capture d'écran ci-contre, la fonction *seuil* indique $n = 23$, ce qui semble correct car :

$$somme(22) < 150000 < somme(23).$$

L'entreprise aura donc fabriqué plus de 150000 unités à partir de la 23e semaine.

```
>>> seuil()
23
>>> somme(22)
142805.49877367966
>>> somme(23)
159086.04865104763
```

FONCTION EXPONENTIELLE

Exercice 13 **Savoir utiliser les propriétés algébriques de la fonction exponentielle.**

Dans cet exercice, on n'utilise notamment les formules suivantes :
pour tout réel a et b et pour tout entier naturel n,
$e^a \times e^b = e^{a+b}$
$\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$
$(e^a)^n = e^{na}$.

a) $e^5 \times e^{-2} \times e^3 = e^{5+(-2)+3} = \boldsymbol{e^6}$.

b) $(e^5 \times e^2)^4 = (e^{5+2})^4 = (e^7)^4 = e^{7\times 4} = \boldsymbol{e^{28}}$.

c) $\frac{e^{-2}\times(e^3)^2}{e^2} = \frac{e^{-2}\times e^{3\times 2}}{e^2} = \frac{e^{-2+6}}{e^2} = e^{4-2} = \boldsymbol{e^2}$.

d) Pour tout réel x, $\frac{(e^x)^2 \times e^{x+1}}{e^{x-1}} = \frac{e^{2x}\times e^{x+1}}{e^{x-1}} = e^{2x+(x+1)-(x-1)} = \boldsymbol{e^{2x+2}}$.

Exercice 14 **Savoir résoudre une équation où apparaît la fonction exponentielle.**

a) $e^{x+2} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad e^{x+2} < e^0 \quad \Leftrightarrow \quad x+2<0 \quad \Leftrightarrow \quad x < -2.$

L'ensemble des solutions de cette inéquation est donc $\boldsymbol{S} =]-\infty\,;\, -\mathbf{2}[$.

b) $e^{5x+1} \geq e \times e^{2x} \quad \Leftrightarrow \quad e^{5x+1} \geq e^1 \times e^{2x} \quad \Leftrightarrow \quad e^{5x+1} \geq e^{1+2x} \quad \Leftrightarrow \quad 5x+1 \geq 1+2x \quad \Leftrightarrow 3x \geq 0 \quad \Leftrightarrow x \geq 0.$

L'ensemble des solutions de cette inéquation est donc $\boldsymbol{S} = [\mathbf{0}\,;\, +\infty[$.

c) $e^{(x^2)} = e \quad \Leftrightarrow \quad e^{(x^2)} = e^1 \quad \Leftrightarrow x^2 = 1 \quad \Leftrightarrow x = 1 \; ou \; x = -1.$

L'ensemble des solutions de cette équation est donc $\boldsymbol{S} = \{-\mathbf{1}\,;\mathbf{1}\}$.

d) On reconnaît une « équation produit nul » donc :

$$(e^x - e^2)(e^{-x}+5) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^x - e^2 = 0 \; ou \; e^{-x}+5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad e^x = e^2 \; ou \; e^{-x} = -5 \qquad \Leftrightarrow \quad x = 2 \; ou \; e^{-x} = -5$$

L'équation n'admet aucune solution sur $\mathbb{R}$ car la fonction exponentielle est une fonction à valeurs strictement positives.

L'ensemble des solutions de cette équation est donc $\boldsymbol{S} = \{\mathbf{2}\}$.

Exercice 15 **Savoir étudier une fonction où apparaît la fonction exponentielle.**

On rappelle la dérivée la fonction exp est la fonction exp : $exp' = exp$.

Etude de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (5-x)e^x$.

a) $f = u \times v$ donc $f' = u'v + uv'$ avec $\begin{cases} u(x) = 5-x \text{ et } u'(x) = -1 \\ \mathrm{v}(x) = e^x \text{ et } \mathrm{v}'(x) = e^x. \end{cases}$

Donc pour tout réel x, $\boldsymbol{f'(x)} = -1e^x + (5-x)e^x = e^x(1+5-x) = \boldsymbol{e^x(4-x)}$.

b) Pour tout réel x, $e^x > 0$ donc $\boldsymbol{f'(x)}$ **est du signe de** $\boldsymbol{4-x}$.

c) Ainsi, le tableau de variations de la fonction f est :

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		↗	e^4	↘	

$f(4) = (5-4)e^4 = e^4.$

Etude de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (e^x+1)(e^x-3)$.

a) $g = u \times v$ donc $g' = u'v + uv'$ avec $\begin{cases} u(x) = e^x + 1 \text{ et } u'(x) = e^x \\ \mathrm{v}(x) = e^x - 3 \text{ et } \mathrm{v}'(x) = e^x. \end{cases}$

Donc pour tout réel x, $\boldsymbol{g'(x)} = e^x(e^x-3) + (e^x+1)e^x = e^x(e^x - 3 + e^x + 1) = \boldsymbol{2e^x(e^x-1)}$.

b) Pour tout réel x, $2e^x > 0$ donc $\boldsymbol{g'(x)}$ **est du signe de** $\boldsymbol{e^x - 1}$.

Pour tout réel x, $e^x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^x = 1 \quad \Leftrightarrow x = 0$ et $e^x - 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^x > 1 \quad \Leftrightarrow x > 0.$

c) Ainsi, le tableau de variations de la fonction g est :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g		↘	-4	↗	

$g(0) = (e^0+1)(e^0-3) = -4$

Etude de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \frac{x-2}{e^x}$.

a) $h = \frac{u}{v}$ donc $h' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $\begin{cases} u(x) = x - 2 \text{ et } u'(x) = 1 \\ \text{v}(\text{x}) = e^x \text{ et } \text{v}'(\text{x}) = e^x. \end{cases}$

Donc pour tout réel x, $\boldsymbol{h'(x)} = \frac{\mathbf{1}e^x - (x-2)e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x(1-(x-2))}{e^{2x}} = e^{-x}(3-x)$.

b) Pour tout réel x, $e^{-x} > 0$ donc $\boldsymbol{h'(x)}$ **est du signe de** $\mathbf{3 - x}$.

c) Ainsi, le tableau de variations de la fonction h est :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
g		$\nearrow$	e^{-3}	$\searrow$	

$$h(3) = \frac{3-2}{e^3} = \frac{1}{e^3} = e^{-3}.$$

$\boxed{\text{Exercice 16}}$ Savoir utiliser la formule permettant de calculer la dérivée de e^{ax+b}.

Le taux d'alcoolémie d'un homme est donné par la fonction f définie sur $I = [0\,;\,4]$ par : $f(x) = 3xe^{-1{,}25x}$.

a) $f = u \times v$ donc $f' = u'v + uv'$ avec $\begin{cases} u(x) = 3x \text{ et } u'(x) = 3 \\ \text{v}(\text{x}) = e^{-1{,}25x} \text{ et } \text{v}'(\text{x}) = -1{,}25e^{-1{,}25x}. \end{cases}$

(La dérivée de $x \longmapsto e^{ax+b}$ est $x \longmapsto a \times e^{ax+b}$)

D'où, pour tout réel x de l'intervalle I, $\boldsymbol{f'(x)} = 3e^{-1{,}25x} + 3x \times (-1{,}25) \times e^{-1{,}25x} = \boldsymbol{e^{-1{,}25x}(3 - 3{,}75x)}$

b) Pour tout réel x dans I, $e^{-1{,}25x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $3 - 3{,}75x$.

$$3 - 3{,}75x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{3{,}75} \Leftrightarrow x = 0{,}8.$$

Ainsi, le tableau de variations de la fonction f est :

x	0		$0{,}8$		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$2{,}4e^{-1}$	$\searrow$	$12e^{-5}$

$f(0) = 3 \times 0 \times e^{-1{,}25\times 0} = 0$

$f(0{,}8) = 3 \times 0{,}8 \times e^{-1{,}25\times 0{,}8} = 2{,}4e^{-1}$

$f(4) = 3 \times 4 \times e^{-1{,}25\times 4} = 12e^{-5}$.

c) Le taux est donc maximal au bout de 0,8 heures 'est-à-dire au bout de **48 min** (ar $0{,}8 \times 60 = 48$)