Révisions pour préparer l'option "mathématiques comlémentaires"

Dans les deux pages qui suivent, vous trouverez des exercices qui vous permettront de réviser des notions du programme de première dont vous allez avoir besoin en terminale.

Ces notions correspondent aux quatre chapitres suivants :

1. Second degré
2. Dérivation et application
3. Suites numériques
4. Fonction exponentielle

- Vous trouverez, dans les pages de corrigés, des liens en rouge vers des vidéos d'Yvan Monka qui pourront vous aider si vous ne réussissez pas à faire les exercices.
  Si vous bloquez sur un exercice, commencez par regarder la (les) vidéo(s) proposée(s) puis réessayez sans regarder le corrigé et pour finir, vérifiez vos réponses avec le corrigé.
- Chaque chapitre correspond à environ 3h de travail.
- Il est plutôt conseillé de faire ce travail à partir de mi-août.
- Au cours de la première quinzaine du mois de septembre, chaque professeur de mathématiques fera passer dans ses classes une évaluation qui permettra de vérifier vos compétences dans les domaines révisés.

I Second degré

Exercice 1 : racines

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $2x^2 + 5x - 7 = 0$
2. $25x^2 + 30x + 9 = 0$
3. $3x^2 + x + 5 = 2x^2 + 4$

Exercice 2 : utiliser le signe du trinôme pour résoudre des inéquations

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $-2x^2 + 5x - 3 \leq 0$
2. $\dfrac{5x^2 - 4x + 12}{5 - 3x} > 0$
3. $\dfrac{2x^2 - 12x - 17}{4 - x} \leq 1$

Exercice 3 : position relative de 2 courbes

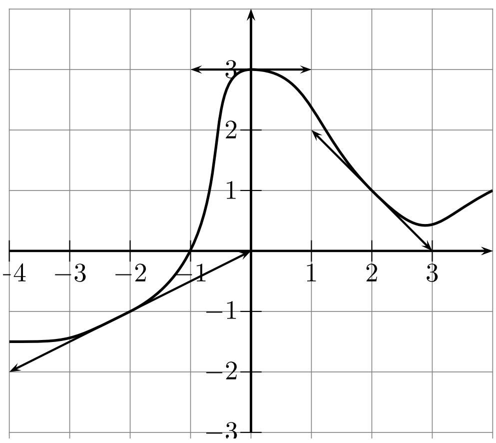
Soit les paraboles $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentant les fonctions du second degré f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x$ et $g(x) = -2x^2 - 3x + 2$.
Déterminer la position relative de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

II Dérivation et applications

Exercice 1

f est une fonction dérivable sur $[-4\,;\,4]$ dont on donne la courbe représentative $\mathscr{C}$ ci-dessous, ainsi que ses tangentes aux points d'abscisses -2 ; 0 et 2 :

1. Déterminer graphiquement les images de -2, 0 et 2 par f.
2. Déterminer graphiquement, en justifiant, les nombres dérivés de f en -2, en 0 et en 2.
3. Donner une équation de la tangente T_2 à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2.



Exercice 2

Dans chacun des cas ci-dessous, calculer la fonction dérivée de la fonction donnée et établir le tableau de variation de cette fonction sur son ensemble de définition :

1. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -0,5x^3 + 6,75x^2 - 21x + 3$.
2. g est définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = 2x - \dfrac{3}{x}$.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 4}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. Déterminer la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$.
2. Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
3. Donner une équation de la tangente T_0 à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
4. Tracer $\mathscr{C}$ et T_0 à l'écran de la calculatrice sur l'intervalle $[-8\,;\,8]$. Vérifier graphiquement les résultats des questions précédentes.
5. Encadrer $f(x)$ sur $[-4; 4]$ puis sur $\left[\dfrac{1}{3}; 3\right]$.

III Suites numériques

Exercice 1

Calculer les 3 premiers termes de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants :

1. $u_n = \dfrac{3n}{n^2+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. $u_0 = -2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -2u_n^2 + 7$.

Exercice 2

Etudier la monotonie de la suite (u_n) dans les cas suivants, après avoir calculé les 3 premiers termes de la suite :

1. (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$
2. (u_n) définie par $u_n = n^2 + 6n + 1$
3. (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$.

Exercice 3

Soit (u_n) la suite arithmétique de 1er terme $u_0 = 8$ et de raison $r = 3$.

1. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n en fonction de n.
2. Calculer u_{50}.
3. Déterminer le plus petit entier naturel tel que : $u_n > 1\,000$.
4. Compléter la fonction **seuil** en python ci-contre, qui ne prend pas d'argument et qui renvoie ce plus entier naturel n tel que $u_n > 1000$.

```
def seuil() :
    u=8
    n=0
    while .......... :
        n=.......
        u=.......
    return(.....)
```

Exercice 4

Soit (u_n) la suite géométrique de 1er terme $u_0 = 3$ et de raison $q = 2$.

1. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n en fonction de n.
2. Calculer u_9.
3. Calculer $S = u_0 + u_1 + ... + u_9$.

IV Fonction exponentielle

Exercice 1

1. Ecrire sous la forme e^a où a est un réel :

   a) $\mathrm{e}^5 \times \mathrm{e}^{-3}$ b) $\dfrac{\mathrm{e}^4}{\mathrm{e}^6}$ c) $\dfrac{\left(\mathrm{e}^3\right)^2}{\mathrm{e}^{-6}}$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$:

   a) $\mathrm{e}^{3x+1} = \mathrm{e}^4$ b) $\mathrm{e}^{3x+4} < \mathrm{e}$ c) $\mathrm{e}^{4x^2} = \mathrm{e}^{5x}$

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x-3)\mathrm{e}^x$ et soit $\mathscr{C}$ sa courbe dans un repère.

1. Déterminer la dérivée de f sur $\mathbb{R}$ et justifier que $f'(x)$ est du signe de $2x-1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Etablir le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3

Le taux d'alcoolémie (en grammes par litre de sang) d'un homme de 70 kg après absorption de deux verres d'alcool à l'instant $x = 0$ est donné, en fonction du temps x (en heures), par la fonction f définie sur $I = [0\,;\,4]$ par $f(x) = 3x\mathrm{e}^{-1,25x}$.

1. En utilisant le fait que f est de la forme $u \times v$, démontrer que : $\forall x \in I,\ f'(x) = (3 - 3,75x)\mathrm{e}^{-1,25x}$.
2. Etablir le tableau de variation de f sur I.
3. En déduire le nombre de minutes au bout duquel le taux d'alcool est maximal.

Corrigé des exercices

I Second degré

Exercice 1

https://www.youtube.com/watch?v=youUIZ-wsYk&feature=youtu.be

1. $2x^2+5x-7=0$ (C'est une équation du second degré et on a $a=2$; $b=5$; $c=-7$)
   $\Delta=b^2-4ac=5^2-4\times2\times(-7)=81$ donc $\Delta>0$
   $$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-5+\sqrt{81}}{2\times2}=\frac{4}{4}=1 \qquad x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-5-\sqrt{81}}{2\times2}=-\frac{7}{2}$$
   donc $\boxed{S=\left\{1\,;-\frac{7}{2}\right\}}$

2. $$25x^2+30x+9=0 \iff (5x)^2+2\times5x\times3+3^2=0 \iff (5x+3)^2=0 \iff 5x+3=0 \iff x=-\frac{3}{5}$$ donc $\boxed{S=\left\{-\frac{3}{5}\right\}}$

   Remarque : si on ne voit pas la factorisation, on peut bien sûr calculer Δ qui vaut ici 0 et on retrouve que l'équation a une unique solution : $x_0=\frac{-b}{2a}=\frac{-30}{2\times25}=\frac{-3}{5}$

3. $3x^2+x+5=2x^2+4 \iff 3x^2+x+5-2x^2-4=0 \iff x^2+x+1=0$
   $(a=1\,;b=1\,;c=1)$
   $\Delta=b^2-4ac=1-4=-3$ donc $\Delta<0$
   D'où $\boxed{S=\emptyset}$

Exercice 2

https://www.youtube.com/watch?v=sFNW9KVsTMY&feature=youtu.be (exemple de base 1)
https://www.youtube.com/watch?v=pT4xtI2Yg2Q&feature=youtu.be (exemple de base 2)
https://www.youtube.com/watch?v=89qx7KTCCdg&feature=youtu.be (Résolution de deux inéquations (exemples plus complets))

A vous de détailler le calcul de Δ et des racines

1. $-2x^2+5x-3\leq0$
   Avec les formules du cours, on trouve $\Delta=1$; $x_1=1$ et $x_2=\frac{3}{2}$

x	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$-2x^2+5x-3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$a=-2$; $a<0$

Rappel : le trinôme est du signe de a à l'extérieur des racines et de $-a$ entre les racines.

Donc $\boxed{S=]-\infty\,;1]\cup\left[\frac{3}{2}\,;+\infty\right[}$

2. $\dfrac{5x^2-4x+12}{5-3x}>0$

• $5x^2-4x+12=0$
$\Delta=-224$ donc $\Delta<0$. Or $a=5$ donc $a>0$.
D'où $5x^2-4x+12$ est strictement positif sur $\mathbb{R}$.

• $5-3x=0 \iff 5=3x \iff \frac{5}{3}=x$ ($\frac{5}{3}$ est une VI)

x	$-\infty$		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
$5x^2-4x+12$		$+$	|	$+$	
$5-3x$		$+$	0	$-$	
$\dfrac{5x^2-4x+12}{5-3x}$		$+$	||	$-$	

donc $\boxed{S = \left]-\infty\,;\,\frac{5}{3}\right[}$

3. $\dfrac{2x^2-12x-17}{4-x} \leq 1 \iff \dfrac{2x^2-12x-17}{4-x} - \dfrac{4-x}{4-x} \leq 0 \iff \dfrac{2x^2-12x-17-(4-x)}{4-x} \leq 0$

$\iff \dfrac{2x^2-12x-17-4+x}{4-x} \leq 0$

$\iff \dfrac{2x^2-11x-21}{4-x} \leq 0$

• $2x^2-11x-21=0$
$\Delta = 289$
$x_1 = -\dfrac{3}{2}$ et $x_2 = 7$

• $4-x=0 \iff 4=x$
4 est une V.I.

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		4		7		$+\infty$
$2x^2-11x-21$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$4-x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$\dfrac{2x^2-11x-21}{4-x}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

$a=2\,;\, a>0$

$\boxed{S = \left[-\frac{3}{2}\,;\,4\right[\cup [7\,;\,+\infty[}$

Exercice 3

https://www.youtube.com/watch?v=EyxP5HIfyF4&feature=youtu.be

Donner la position relative de 2 courbes, c'est dire pour quelles valeurs du réel x :
a) $\mathscr{C}_f$ est au dessus de $\mathscr{C}_g$ b) $\mathscr{C}_f$ est en dessous de $\mathscr{C}_g$ c) les 2 courbes admettent un point commun.
Pour répondre à cette question, on étudie le signe de $f(x)-g(x)$.

Pour tout réel x, $\begin{aligned} f(x)-g(x) &= x^2+2x-(-2x^2-3x+2) \\ &= x^2+2x+2x^2+3x-2 \\ &= 3x^2+5x-2 \end{aligned}$

$\Delta = b^2-4ac = 5^2-4\times 3\times(-2) = 49$ donc $\Delta > 0$

$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-5+\sqrt{49}}{2\times 3} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$ $\qquad \begin{aligned} x_2 &= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-5-\sqrt{49}}{2\times 3} \\ &= -2 \end{aligned}$

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$3x^2+5x-2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

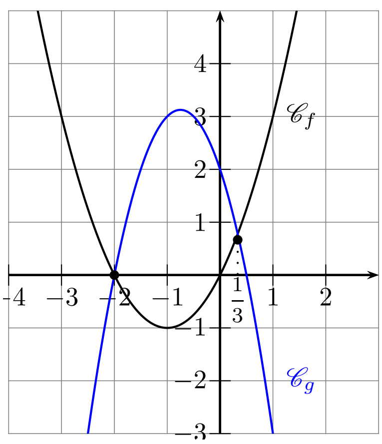
$a>0$

• Pour $x \in]-\infty\,;\,-2[\cup\left]\frac{1}{3}\,;\,+\infty\right[$, $f(x)-g(x)>0$ donc $\mathscr{C}_f$ est strictement au dessus de $\mathscr{C}_g$,

• Pour $x \in \left]-2\,;\,\frac{1}{3}\right[$, $f(x)-g(x)>0$ donc $\mathscr{C}_f$ est strictement en dessous de $\mathscr{C}_g$,

• Pour $x \in \left\{-2\,;\,\frac{1}{3}\right\}$, $f(x)-g(x)=0$ donc $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont sécantes.

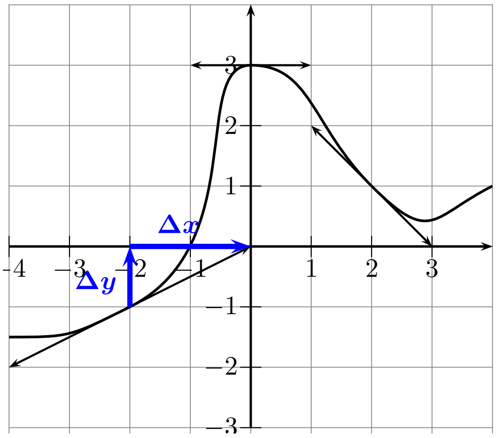
On peut vérifier graphiquement avec les représentations graphiques de f et g données ci-contre.



II Dérivation et applications

Exercice 1

👁 https://www.youtube.com/watch?v=0jhxK55j0Ns&feature=youtu.be



1. $f(-2) = -1$; $f(0) = 3$ et $f(2) = 1$.
2. $f'(-2)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse -2 donc $f'(-2) = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{1}{2}$.
   De même, on trouve $f'(0) = 0$ (tangente horizontale au point d'abscisse 0) et $f'(2) = -1$.
3. T_2 a pour équation $y = f'(2)(x-2) + f(2)$
   ce qui donne : $y = -(x-2) + 1$ soit encore $\boxed{y = -x + 3}$

Exercice 2

👁 https://www.youtube.com/watch?v=9Mann4wOGJA&feature=youtu.be (dériver les fonctions de référence)
👁 https://www.youtube.com/watch?v=23_Ba3NOfu4&feature=youtu.be (établir un tableau de variation à partir du signe de la dérivée)

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -0,5 \times 3x^2 + 6,75 \times 2x - 21 \times 1 + 0 = \boxed{-1,5x^2 + 13,5x - 21}$.

   $-1,5x^2 + 13,5x - 21 = 0$
   $\Delta = 13,5^2 - 4(-1,5)(-21) = 56,25$

   $x_1 = \dfrac{-13,5 - \sqrt{56,25}}{2(-1,5)} = 7$ $\qquad$ $x_2 = \dfrac{-13,5 + \sqrt{56,25}}{2(-1,5)} = 2$

x	$-\infty$		2		7		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
var de f		↘	16	↗	47,25	↘	

   $a = -1,5$; $a < 0$

   $f(2) = -0,5 \times 2^3 + 6,75 \times 2^2 - 21 \times 2 + 3 = 16$ $\qquad$ $f(7) = -0,5 \times 7^3 + 6,75 \times 7^2 - 21 \times 7 + 3 = 47,25$

2. $g(x) = 2x - \dfrac{3}{x} = 2x - 3 \times \dfrac{1}{x}$.

   g est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $g'(x) = 2 \times 1 - 3 \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = \boxed{2 + \dfrac{3}{x^2}}$ (la dérivée de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R} - \{0\}$ est $x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$)

   Remarque : en général, il faut présenter le résultat sous la forme d'un quotient parce que c'est souvent plus facile pour déterminer le signe mais ici, on voit tout de suite qu'on a affaire à une expression strictement positive, comme cela justifié ci-dessous.

   Pour tout $x > 0$, $x^2 > 0$ donc $\dfrac{3}{x^2} > 0$ d'où $2 + \dfrac{3}{x^2} > 2 > 0$ et donc $f'(x) > 0$. On en déduit que f est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
var de f	‖	↗	

Exercice 3

https://www.youtube.com/watch?v=zxyKLqnlMIk&feature=youtu.be (déterminer un extremum)

1. $f = \dfrac{u}{v}$ donc $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = x^2 + 4$, $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 2x$

   $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \dfrac{1(x^2+4) - x \times 2x}{(x^2+4)^2} = \boxed{\dfrac{-x^2+4}{(x^2+4)^2}}$

2. On étudie le signe de $f'(x)$:
   - $-x^2 + 4 = 0 \iff x^2 = 4 \iff x = 2$ ou $x = -2$
   - $x^2 + 4 = 0 \iff x^2 = -4$ pas de solution dans $\mathbb{R}$ et on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ (x^2+4)^2 > 0$

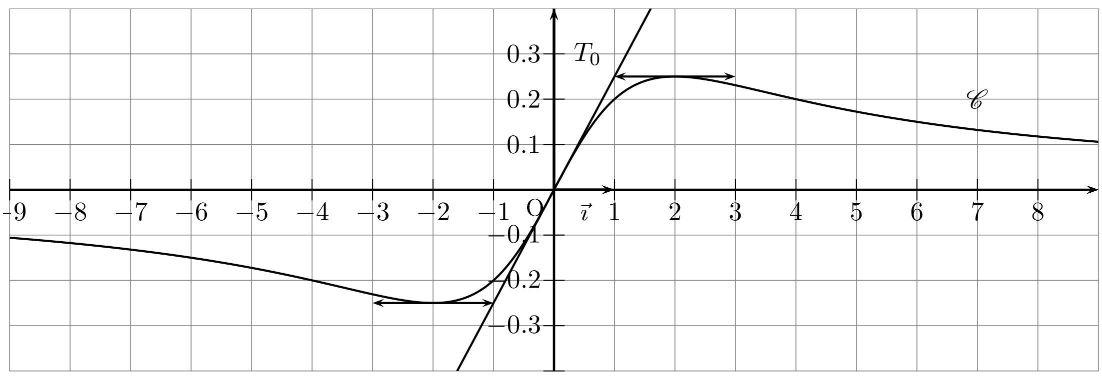
x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$-x^2+4$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$(x^2+4)^2$		$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
var de f		$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	

$a = -1$, $a < 0$

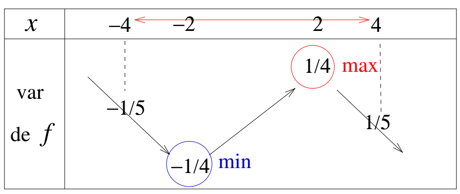
$f(-2) = \dfrac{-2}{4+4} = -\dfrac{1}{4}$ et $f(2) = \dfrac{2}{2^2+4} = \dfrac{1}{4}$

Remarque : une fois qu'on a écrit que $(x^2+4)^2 > 0$, on peut aussi en déduire que $f'(x)$ est du signe de $-x^2+4$ et on peut alors éliminer les deux premières lignes de signe du tableau pour donner directement le signe de $f'(x)$.

3. La tangente T_0 à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 admet pour équation : $y = f'(0)(x-0) + f(0)$.
   Or $f'(0) = \dfrac{0^2+4}{(0^2+4)^2} = \dfrac{4}{16} = \dfrac{1}{4}$ et $f(0) = \dfrac{0}{0^2+4} = 0$ donc $\boxed{T_0 : y = \dfrac{1}{4}x}$.

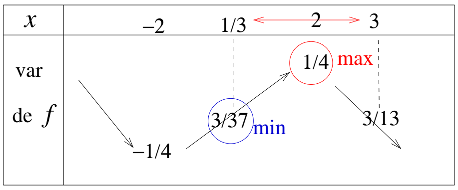
4. 

5. - $f(4) = \dfrac{1}{5}$ et $f(-4) = -\dfrac{1}{5}$
   conseil : reporter ces valeurs dans le tableau de variation de f pour repérer le maximum et le minimum de f sur cet intervalle (ne pas réécrire un tableau, utiliser celui que vous avez établi au dessus) :



Sur $[-4; 4]$, le minimum de f est $-\dfrac{1}{4}$ et son maximum $\dfrac{1}{4}$ donc pour tout $x \in [-4; 4]$, on a $-\dfrac{1}{4} \leq f(x) \leq \dfrac{1}{4}$.

   - $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{3}{37}$ et $f(3) = \dfrac{3}{13}$. Même conseil que ci-dessus.



Sur $\left[\frac{1}{3};3\right]$, le minimum de f est $\frac{3}{37}$ et son maximum $\frac{1}{4}$ donc pour tout $x \in \left[\frac{1}{3};3\right]$, on a $\frac{3}{37} \leq f(x) \leq \frac{1}{4}$.

III Suites numériques

Exercice 1

https://www.youtube.com/watch?v=HacflVQ7DIE&feature=youtu.be

1. $u_n = \dfrac{3n}{n^2+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
   donc $u_0 = \dfrac{3 \times 0}{0^2+1} = 0$; $u_1 = \dfrac{3 \times 1}{1^2+1} = \dfrac{3}{2}$; $u_2 = \dfrac{3 \times 2}{2^2+1} = \dfrac{6}{5}$
2. $u_0 = -2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = -2u_n^2 + 7$.
   $u_0 = -2$; $u_1 = -2u_0^2 + 7 = -2(-2)^2 + 7 = -1$; $u_2 = -2u_1^2 + 7 = -2(-1)^2 + 7 = 5$.

Exercice 2

https://www.youtube.com/watch?v=DFz8LDKCw9Y&feature=youtu.be

1. • $u_0 = 0$; $u_1 = u_0 + 2 \times 0 + 3 = 3$ et $u_2 = u_1 + 2 \times 1 + 3 = 8$ (la suite semble croissante).

   • $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_{n+1} - u_n} = u_n + 2n + 3 - u_n = \boxed{2n+3}$
   Or $n \geq 0$ donc $2n \geq 0$ d'où $2n + 3 \geq 3 > 0$. On a donc $u_{n+1} - u_n > 0$ et on en déduit que $\underline{(u_n) \text{ est croissante}}$.

2. • $u_0 = 1$; $u_1 = 8$ et $u_2 = 17$ (la suite semble croissante)

   • $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_{n+1} - u_n} = (n+1)^2 + 6(n+1) + 1 - (n^2 + 6n + 1) = n^2 + 2n + 1 + 6n + 6 + 1 - n^2 - 6n - 1 = \boxed{2n+7}$
   Or $n \geq 0$ donc $2n \geq 0$ d'où $2n + 7 \geq 7 > 0$. On a donc $u_{n+1} - u_n > 0$ et on en déduit que $\underline{(u_n) \text{ est croissante}}$.

3. (u_n) est définie par $u_n = (-1)^n$.
   • $u_0 = (-1)^0 = 1$; $u_1 = (-1)^1 = -1$ et $u_2 = (-1)^2 = 1$ donc $u_0 > u_1$ mais $u_1 < u_2$.
   La suite n'est donc pas monotone.

Exercice 3

Soit (u_n) la suite arithmétique de 1er terme $u_0 = 8$ et de raison $r = 3$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr = \boxed{8 + 3n}$.
2. $u_{50} = 8 + 3 \times 50 = \boxed{158}$.
3. $u_n > 1\,000 \iff 8 + 3n > 1\,000 \iff 3n > 992 \iff n > \dfrac{992}{3}$
   or $\dfrac{992}{3} \approx 330,7$ donc le plus petit entier n tel que $u_n > 1\,000$ est 331.
4. A l'avant dernière ligne, on a « u prend la valeur u+3 » car : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 3$ (relation de récurrence pour une suite arithmétique de raison 3) mais on pourrait aussi écrire « u prend la valeur 8+3n » en utilisant l'expression de la question 1.

```
def seuil() :
    u=8
    n=0
    while u ≤ 1000 :
        n=n+1
        u=u+3
    return(n )
```

Exercice 4

https://www.youtube.com/watch?v=gUkOjvAiZGA&feature=youtu.be (pour la dernière question sur la somme des 1ers termes)

Soit (u_n) la suite géométrique de 1er terme $u_0 = 3$ et de raison $q = 2$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n = \boxed{3 \times 2^n}$.
2. $u_9 = 3 \times 2^9 = \boxed{1536}$.
3. $$\begin{aligned} S &= u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_9 \\ &= u_0 + u_0 \times q + u_0 \times q^2 + \ldots + u_0 \times q^9 \\ &= u_0(1 + q + q^2 + \ldots + q^9) \\ &= u_0 \times \frac{1 - q^{9+1}}{1 - q} \qquad \text{(si vous connaissez cette formule, vous pouvez l'écrire dès le début)} \\ &= 3 \times \frac{1 - 2^{10}}{1 - 2} \\ &= 3(2^{10} - 1) \\ &= \boxed{3\,069} \end{aligned}$$

IV Fonction exponentielle

Exercice 1

https://www.youtube.com/watch?v=qDFjeFyA_OY&feature=youtu.be (pour les calculs de la question 1)
https://www.youtube.com/watch?v=dA73-HT-I_Y&feature=youtu.be (résolution d'équations)
https://www.youtube.com/watch?v=d28Fb-zBe4Y&feature=youtu.be (résolution d'inéquations)

1. a) $e^5 \times e^{-3} = e^{5+(-3)} = \boxed{e^2}$ b) $\frac{e^4}{e^6} = e^{4-6} = \boxed{e^{-2}}$ c) $\frac{(e^3)^2}{e^{-6}} = \frac{e^{3\times 2}}{e^{-6}} = e^{6-(-6)} = \boxed{e^{12}}$
2. a) $e^{3x+1} = e^4 \iff 3x + 1 = 4 \iff 3x = 3 \iff x = 1$ $\boxed{S = \{1\}}$

   b) $e^{3x+4} < e \iff e^{3x+4} < e^1 \iff 3x + 4 < 1 \iff 3x < -3 \iff x < -1$ $\boxed{S =]-\infty\,;\,-1[}$

   c) $e^{4x^2} = e^{5x} \iff 4x^2 = 5x \iff 4x^2 - 5x = 0 \iff x(4x - 5) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } 4x - 5 = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = \frac{5}{4}$

   $\boxed{S = \left\{0\,;\,\frac{5}{4}\right\}}$

Exercice 2

https://www.youtube.com/watch?v=_MA1aW8ldjo&feature=youtu.be

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x - 3)e^x$ et soit $\mathscr{C}$ sa courbe dans un repère.

1. $f = u \times v$ donc $f' = u'v + uv'$ avec $u(x) = 2x - 3$ et $v(x) = e^x$

   $u'(x) = 2$ $v'(x) = e^x$ (la dérivée de $x \mapsto e^x$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto e^x$)

   D'où $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2e^x + (2x - 3)e^x = e^x(2 + 2x - 3) = \boxed{e^x(2x - 1)}$.

   Or $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ donc $\underline{f'(x) \text{ est du signe de } 2x - 1}$.

2. $2x - 1 = 0 \iff x = \frac{1}{2}$ $f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(2 \times \frac{1}{2} - 3\right)e^{\frac{1}{2}} = -2e^{\frac{1}{2}}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
var de f		$\searrow$	$-2e^{1/2}$	$\nearrow$	

Exercice 3

1. $f = u \times v$ donc $f' = u'v + uv'$ avec $u(x) = 3x$ et $v(x) = \mathrm{e}^{-1,25x}$
$u'(x) = 3$ $\quad v'(x) = -1,25\,\mathrm{e}^{-1,25x}$ (la dérivée de $x \mapsto \mathrm{e}^{ax+b}$ est $x \mapsto a\mathrm{e}^{ax+b}$)

D'où $\forall x \in I,\ f'(x) = 3\,\mathrm{e}^{-1,25x} + 3x \times (-1,25)\,\mathrm{e}^{-1,25x} = (3 + 3x \times (-1,25))\,\mathrm{e}^{-1,25x}$
$= \boxed{(3 - 3,75x)\mathrm{e}^{-1,25x}}$

2. • $\forall x \in I,\ e^{-1,25x} > 0$ donc $\underline{f'(x) \text{ est du signe de } 3 - 3,75x}$.

• $3 - 3,75x = 0 \iff x = \dfrac{3}{3,75} \iff x = 0,8$

x	0		$0,8$		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
var de f	0	$\nearrow$	$2,4\mathrm{e}^{-1}$	$\searrow$	$12\mathrm{e}^{-5}$

$f(0) = 3 \times 0\mathrm{e}^0 = 0$
$f(0,8) = 3 \times 0.8\mathrm{e}^{-1,25\times 0.8} = 2,4\mathrm{e}^{-1}$
$f(4) = 3 \times 4\mathrm{e}^{-1,25\times 4} = 12\mathrm{e}^{-5}$

3. <u>Le taux est donc maximal au bout de 0,8 heures c'est-à-dire au bout de 48 min</u> (car $0,8 \times 60 = 48$)